Деякі роздуми про вивчення границі числової послідовності

М. В. Босовський, М. В Третяк

Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, м. Черкаси, Україна
Corresponding author. E-mail: bosovskyy@gmail.com, mykola.tretyak@gmail.com

Paper received 24.08.17; Revised 28.08.17; Accepted for publication 29.08.17.

Анотація. В статті представлено авторське бачення змістового наповнення та методики вивчення теми «Границя числової послідовності» в курсі математичного аналізу для студентів математичних спеціальностей. Виклад ведеться у вигляді аргументованих відповідей на ряд традиційних для даної теми питань.

***Ключові слова**: послідовність, границя, навчання студентів.*

Постановка проблеми. Границя – одне з основних понять математики. З цим поняттям пов’язані найважливіші поняття математичного аналізу: неперервність, похідна, диференціал, інтеграл, сума ряду. З ним пов’язана значна частина основоположних понять усієї «неперервної» математики. Тема «Границя» давно вже стала традиційною для курсів вищої математики та математичного аналізу (МА), однак не припиняються науково-методичні пошуки, що ставлять на меті удосконалення як ідейно-змістового наповнення теми «Границя» так і методичного забезпечення її викладу, що свідчить про актуальність зазначеної проблематики.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Відомі математики-педагоги, автори знаних підручників з МА, наприклад, [1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8] по-різному вирішують цілий ряд актуальних для даної проблематики питань.

Дана стаття ставить за **мету** привернути увагу до деяких науково-методичних аспектів вивчення теми «Границя послідовності» у курсі математичного аналізу для студентів математичних спеціальностей класичних та педагогічних університетів. Вона відображає авторське бачення відповідей на ряд, ставших уже сакраментальними, питань щодо вивчення границі числової послідовності.

Виклад основного матеріалу

1. Який порядок уведення понять обрати: границя – неперервність чи, навпаки, неперервність – границя? Переважна більшість математиків-методистів, авторів підручників з МА сходяться на думці, що спочатку треба уводити поняття границі, а потім уже, зокрема через границю, означати неперервність. Наприклад, в [1; 3; 4; 6; 7] дотримуються саме такого порядку викладу. Однак є прихильники, наприклад, [2; 5] іншого підходу: вони пропонують спочатку увести поняття неперервності, а потім через нього поняття границі функції в точці. Зазвичай це роблять так.

Нехай $X \subset \mathbb{R}$ і $f : X \to \mathbb{R}$ – функція, $a \in cl(X)$. Число b називається границею функції f в точці a, якщо функція $\tilde{f}$, визначена рівністю $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), \text{ якщо } x \in X \setminus a, \\ b, \text{ якщо } x = a \end{cases}$ неперервна в точці a

Безумовно, обидва підходи мають право на існування. Проте, з огляду на те, що ці поняття уводяться вперше (якщо не брати до уваги їх шкільну пропедевтику) і до того ж для функцій, що діють із $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, то слід віддати перевагу першому підходу. Наші аргументи: 1) при першому підході уведення поняття границі можна розпочати з його найпростішого виду – границі числової послідовності; 2) перший підхід дозволяє найбільш природно увести поняття границі функції на нескінченності; 3) саме перший підхід дозволяє найбільш просто увести поняття нескінченної границі; 4) перший підхід дає найкращу пропедевтику для уведення аксіоматично поняття збіжності та границі (за Фреше) без апелювання до метрики чи топології.

2. Останнім часом набуває поширення думка, що вивчення поняття границя слід розпочинати відразу з границі функції і в подальшому розглядати границю послідовності як частинний випадок останньої [2; 5]. Такий підхід, безсумнівно, є прийнятним, особливо, з огляду на ущільнення матеріалу курсу МА, викликаного або зменшенням навчального часу, або уведенням до курсу нового матеріалу, або тим і іншим. Ми ж вважаємо, як і автори [1; 3; 4; 6], що вивчення теми «Границя» слід розпочинати саме з границі послідовності. Наші аргументи: 1) границя функції занадто складне і важливе поняття, щоб уводити його без пропедевтики у вигляді границі послідовності; 2) границя послідовності – один з найпростіших і водночас найзатребуваніших видів границі як у самому МА так і в багатьох інших математичних дисциплінах; 3) до границі числової послідовності, у той чи інший спосіб, зводяться збіжності функціональних послідовностей і рядів (точкова, рівномірна, за мірою, в середньому), слабка та сильна збіжності послідовностей елементів нормованих просторів чи функціоналів і т. п.); 4) границя послідовності – цілком самодостатнє поняття, воно є не тільки джерелом великої кількості нових понять і нових задач, а й дієвим інструментом для розв’язування багатьох математичних проблем; 5) границя послідовності надає оптимальні можливості для формування і розвитку специфічного логіко-аналітичного мислення, притаманного МА (згадаймо означення чи теореми, що містять три і більше кванторів), конче необхідного для успішного вивчення цілого ряду математичних дисциплін.

3. Існує кілька означень границі числової послідовності: через посередність нескінченно малих; $(\varepsilon - N)$ Коші; в термінах околів; через посередність частинних границь; аксіоматичне за Фреше. Безумовно важливим є вибір серед них ,так би мовити, основного означення границі послідовності. Ми дотримуємося думки, що таким основним означенням має бути означення в термінах околів. Наші аргументи: 1) саме означення в термінах околів найбільш природно, прозоро і наочно передає сутність поняття границі послідовності; 2) означення в термінах околів найкраще підходить для перенесення в простори більш загальної природи; 3)

використання цього означення спрощує доведення більшості теорем про границю послідовності як у логічному так і в технічному плані; 4) саме від цього означення найпростіше можна перейти до будь-якого іншого, із вище зазначених, означень границі послідовності; 5) саме це означення створює найкращу пропедевтику для означення границі по базі (фільтру).

4. Немає одностайності і в питанні про глибину і повноту вивчення границі послідовності. Методичні підходи варіюються від мінімалістських (передбачають лише формулювання означення границі послідовності та кількох найпростіших теорем про границю з наведенням кількох ілюстративних прикладів) [5; 7] до максималістських (передбачають вивчення границі та частинних границь послідовності, усереднення послідовностей і багато чого іншого з доведенням усіх сформульованих теорем) [1; 3; 4; 6]. На нашу думку, потрібно у процесі вивчення теми «Границя послідовності» навести формулювання всіх перелічених у пункті 2 означень границі послідовності та показати їх еквівалентність, а також довести кілька теорем про границю послідовності, обмежившись формулюванням решти теорем. Наші аргументи: 1) на цьому етапі найважливішою є ідейна, а не технічна сторона і тому не слід занадто акцентувати увагу на останній; 2) сформульовані теореми згодом будуть доведені у більш загальному вигляді як теореми про границю функції; 3) розгляд доведень кількох теорем про границю послідовності слугуватиме хорошою пропедевтикою для усвідомлення як самого поняття границі функції так і оволодіння технікою доведень теорем про границю функції; 4) заощаджений на доведеннях теорем час можна використати для формування широкого, сучасного уявлення про послідовність і її границю.

5. Спостерігається значна розбіжність і в поглядах на місце та роль частинних границь послідовності у курсі МА (від повного ігнорування [4; 6] до майже практичного зрівнювання за значущістю з границею послідовності [6]). Ми виходимо з того, що поняття частинної границі важливе саме по собі і перспективне як для подальшого вивчення аналізу так і для поточного опанування понятійно-операційним апаратом аналізу. При цьому нам видається важливим наступне: 1) означення частинної границі дати в термінах околів; 2) в обов'язковому порядку увести поняття нижньої та верхньої частинних границь послідовності, причому саме як найменшої та найбільшої частинних границь послідовності відповідно; 3) звернути увагу студентів на теореми про перехід до нижньої та верхньої частинних границь в рівностях та нерівностях.

6. Різняться методичні підходи і щодо означення та вивчення підпослідовностей. Є навіть підручники, у яких таке поняття як підпослідовність майже не згадується, наприклад [1; 4; 6]. В інших же [2; 3; 5] поняття підпослідовності уводиться відразу за означенням послідовності і потім активно використовується у подальшому вивченні МА. Ми є прихильниками останнього і вважаємо, що поняття підпослідовності заслуговує на серйозну увагу в курсі МА. На користь цього свідчать не тільки значний теоретико-проблемний потенціал а й широкі задачні та розвивальні можливості, що з'являються у процесі використання цього поняття як у курсі МА так і в споріднених з МА дисциплінах. Наш досвід свідчить, що: 1) означаючи підпослідовність вихідної послідовності, бажано давати потрактування підпослідовності і як композиції двох функцій (зростаючої послідовності натуральних чисел та вихідної послідовності) і як звуження вихідної послідовності на нескінченну підмножину множини натуральних чисел; 2) підпослідовності необхідно вивчати у тісному взаємозв'язку з частинними границями послідовності; 3) потрібно принагідно звертати увагу студентів на зв'язки фінальної поведінки послідовності з фінальною поведінкою її підпослідовностей; 4) особливу увагу слід звернути на те, що для монотонних і фундаментальних послідовностей збіжність якої-небудь їхньої підпослідовності тягне за собою збіжність самої послідовності.

7. Рекурентні послідовності знаходять все більш широкі застосування в різних розділах математики і, зокрема, в аналізі. В останній час вони все частіше. зустрічаються в математичних змаганнях школярів. Проте, в темі «Границя послідовності», рекурентні послідовності належного представлення ще не знайшли. Більше того, як засвідчує аналіз переважної кількості сучасних підручників і посібників з МА, зокрема [1; 2; 3; 4; 5; 6], вони там часто не представлені зовсім. Нам видається, що: 1) необхідно включити принаймні початкові відомості про рекурентні послідовності до курсів з МА, особливо для студентів математичних спеціальностей; 2) у процесі вивчення теми «Границя послідовності» обов'язково передбачити дослідження рекурентних послідовностей на обмеженість і збіжність та обчислення їхніх границь; 3) у процесі подальшого вивчення аналізу (математичного, комплексного, функціонального, фрактального) принагідно залучати до розгляду рекурентні послідовності на предмет їх дослідження, зокрема , на обмеженість і збіжність.

8. Існують різні думки щодо доцільності використання тих чи інших методів усереднення послідовностей під час вивчення теми «Границя послідовності». Наша багаторічна практика навчання МА студентів математичних спеціальностей переконливо свідчить, що принаймні найпростіші методи (середніх арифметичних, Ріса (R, p_n)) необхідно розглядати. Принагідно відмітимо, що автори підручників [4; 6] розглядають теорему Тьопліца, з якої ,як частинні випадки, випливають, вище зазначені метод середніх арифметичних і метод Ріса. Більшість підручників з МА ознайомлення студентів навіть з найпростішими методами усереднення послідовностей не передбачають.

9. Неоднозначним є також ставлення до відомої теореми Штольца (дискретного аналогу правила Лопіталя). Наприклад, автори підручників [1; 4; 6] терему Штольца детально, з прикладами розглядають, натомість автори [2; 3; 5; 7], як і багато інших, про цю теорему навіть не згадують. Наша думка з цього приводу – теорему Штольца вивчати потрібно. Переконливими нам видаються наступні аргументи: 1) багато нетривіальних границь послідовностей найпростіше можна знайти за допомогою теореми Штольца; 2) вивчення теореми Штольца та найпростіших методів усереднення послідовностей слугує пропедевтикою важливого розділу класичного та сучасного аналізу «Підсумовування розбіжних послідовностей і рядів»; 3) теорема

Штольца – це своєрідна пропедевтика правила Лопіталя. Принагідно зазначимо, що теорема Штольца опублікована австрійським математиком Отто Штольцем у 1895 році, а правила Лопіталя в 1696 році. При цьому, якщо теорема Штольца розглядається після теореми Тьопліца, то робити це слід на практичному занятті та подавати як ілюстрацію застосувань теореми Тьопліца. Якщо ж теорема Штольца передує вивченню методів усереднення послідовностей, то її краще розглядати на лекції і вже потім, редукцією до неї, встановлювати фактично регулярність методів середніх арифметичних $(C,1)$ та Ріса (R, p_n).

10. Кілька слів про вивчення «о»-символіки Ландау в курсі МА. У цьому питанні серед математиків та методистів теж немає одностайності. Більшість, як і автори підручників [1; 3; 4; 6; 7], «о»-символіку Ландау розглядають у темі «Границя функції» та в подальшому, більш чи менш широко, використовують у процесі вивчення МА. Решта, з тих чи інших причин, «о» – символіку в курсі МА не розглядають. Ми схиляємося до думки, що «о»-символіку в курсі МА вивчати необхідно. У цьому нас переконують наступні аргументи: 1) використання «о»-символіки та таблиці еквівалентних нескінченно малих істотно спрощують у багатьох випадках обчислення границь; 2) використання «о»-символіки дає можливість спростити формулювання багатьох означень і теорем; 3) процес розв'язування задач і, особливо, формулювання та запис їх обґрунтувань істотно полегшується, якщо використовувати «о»-символіку Ландау; 4) як у самому МА так і в багатьох споріднених областях математики «о»-символіка – частина сучасного, популярного математичного інструментарію, що знаходить широкі застосування. Більше того, ми переконані, що початкові відомості про «о»-символіку Ландау студенти повинні одержувати саме вивчаючи тему «Границя послідовності». Наші аргументи: 1) границя послідовності – найпростіший та один з найважливіших видів границі функції (і водночас одне з найбільш важко засвоюваних понять МА), тому пропедевтичний розгляд в темі «Границя послідовності» важливих понять і фактів стосовно границі функції («о»-символіка – один з них) – просто необхідність; 2) усякі виважені кроки по модернізації понятійного, аналітичного та символьного апарату МА повинні знаходити підтримку.

11. Висловимо свою думку щодо ланцюгових (неперервних) дробів.

Свого часу початкові відомості про ланцюгові дроби розглядалися в шкільному курсі математики. Нині ланцюгові дроби залишилися предметом розгляду лише в курсах теорії чисел, що читаються для студентів математичних спеціальностей. З огляду на те що: 1) поняття числа та його представлення є одними з найважливіших математико-культурних і загальнокультурних понять; 2) дійсні числа однозначно представляються ланцюговими дробами; 3) підхідні дроби є, у певному сенсі, найкращими наближеннями ірраціональних чисел; 4) представлення дійсних чисел ланцюговими дробами дозволяють значно простіше і повніше виявляти властивості цих чисел, аніж їх представлення систематичними дробами, ми вважаємо, що математико-культурне значення ланцюгових дробів істотно применшене, а аудиторія, що підлягає ознайомленню з цим поняттям, необґрунтовано звужена. Безумовно, ми беремо до уваги, що для ланцюгових дробів не існує жодних практично прийнятних правил арифметичних дій (вже задача представлення ланцюговим дробом суми двох чисел, заданих ланцюговими дробами, надзвичайно складна) і звідси їх сприйняття як архаїчних математичних об'єктів у сучасному комп'ютеризованому світі. З огляду на сказане, ми вважаємо, що саме у під час вивчення границі послідовності потрібно знайти час і ознайомити студентів з ланцюговими дробами. При цьому акцентувати увагу на тому, що: 1) будь-яке дійсне число є границею послідовності (фінально сталої, якщо число раціональне) підхідних дробів; 2) число і його представлення – різні поняття, причому представлень у кожного числа існує безліч; 3) представлення дійсних чисел ланцюговими дробами часто є більш інформативними, ніж їх представлення систематичними дробами; 4) представлення фундаментальних констант φ (золотий переріз), e, π десятковими дробами безсистемні та нагадують хаотичне нагромадження цифр, в той же час їхні представлення ланцюговими дробами вражають своєю досконалістю, наприклад:

$$\varphi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}},\quad e = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\ldots}}}},\quad \frac{4}{\pi} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\ldots}}}}.$$

12. Кілька слів щодо цілого ряду цікавих і, що важливо, цілком доступних для опанування студентами-першокурсниками. понять, які стосуються числових послідовностей. Мова йде про: опуклість послідовності, варіацію послідовності, перестановки послідовності, щільність підпослідовності у вихідній послідовності, арифметико-геометричну прогресію. Наше бачення таке – якщо виникають достатні передумови (наявний резерв часу, достатньо підготовлена аудиторія, зацікавлений і мотивований викладач), то, принаймні деякі із зазначених вище понять потрібно розглядати. Наш досвід показує, що оптимально це слід робити: а) на практичних заняттях через формулювання та розв'язування відповідних задач; б) задаючи творчі домашні (індивідуальні) завдання; в) через курсові та дипломні роботи.

На завершення дамо відповідь на можливий закид щодо недостатньої кількості годин на вивчення МА та пов'язану з цим практичну неможливість розглянути тему «Границя послідовності» так як пропонується в наших рекомендаціях. Дійсно, останнім часом в ряді університетів спостерігається прикра тенденція до скорочення нормативної кількості годин на вивчення МА. Не сприймаючи такого роду новації, ми все ж висловимо кілька рекомендацій.

1. Насамперед потрібно намагатися хоча б зберегти наявну кількість години, відведених на вивчення МА, попри намагання під будь-якими приводами провести

їх скорочення. При цьому мати на увазі, що підтверджена багаторічною практикою провідних університетів необхідна кількість годин на вивчення МА для математичних спеціальностей – 260-280 год лекцій та 250-280 год семінарських (практичних) занять.

2. Необхідно розглядати курс МА з більш загальних, близьких до функціонального аналізу позицій. В першу чергу це стосується питань неперервності, диференціювання та інтегрування, особливо в $\mathbb{R}^n$. Такий підхід дозволяє більш ефективно та економно використовувати відведений для вивчення МА час.

3. Активізувати математико-методичні пошуки шляхів для заміниріманового інтеграла лебегівським, принаймні в $\mathbb{R}^n$. Напрацювання у цьому напрямку вже є, наприклад [1; 3; 4; 6; 7].

Висновки. 1. Пошуки нових та вдосконалення існуючих концептуальних та методичних підходів до вивчення як математичних курсів в цілому так і їх окремих тем – веління часу. 2. Відповіді на ряд поставлених у статті питань відображають авторський погляд на їх вирішення і спираються на багаторічний досвід їх теоретичного осмислення та практичного розв'язання. Реалізація запропонованих в статті методичних рекомендацій (як показує досвід) підвищує ефективність опанування студентами математичних спеціальностей поняттям границі. 3. Частина рекомендацій спрямована на здійснення пропедевтики цілого ряду важливих понять аналізу та націлена на перспективу. 4. Вони мають на меті посилити розвиваючий характер навчання, його загальнокультурні та математико-культурні можливості. 5. Реалізація пропонованих рекомендацій дозволяє стимулювати та підтримувати пізнавальні інтереси студентів в царині МА.

ЛИТЕРАТУРА

1. Архипов Г. И. Лекции по математическому анализу:.Учеб. для вузов. / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков; под ред. В. А. Садовничего. – М.: Дрофа, 2008. – 640 с.
2. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. / Ж. Дьедонне. – М.: Мир, 1964. – 430 с.
3. Зорич В. А. Математический анализ: Учебник. Ч. I. / В. А. Зорич. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 544 с.
4. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз: Підручник. Ч. I. / А. Я. Дорговцев. – К.: Либідь, 1993. – 320 с.
5. Львовский С. М. Лекции по математическому анализу. / С. М. Львовский. – М.: МЦНМО, 2008. – 296 с.
6. Ляшко И. И. Математический анализ: Учебник. Ч. I. / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, А. Ф. Калайда. – К.: Вища школа. Головное изд-во, 1983. – 495 с.
7. Натанзон С. М. Краткий курс математического анализа. / С. М. Натанзон. – М.: МЦНМО, 2008. – 96 с.
8. Kantorovitz S. Introduction to modern analysis. / S. Kantorovitz. – Oxford University Press, New York, 2003; xii+434 p.
9. Босовський М. В. До питання про вивчення границі числової послідовності / М. В. Босовський, М. В. Третяк // Міжнародна науково-практична конференція «Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики»[26 – 27 листопада 2015 р.] – Вінниця, 2015. – С. 145–148.

REFERENCES

1. Arkhipov G. I. Lekcii po matematicheskomu analizu / G. I. Arkhipov, V. A Sadovnichii, V. N. Chubarikov. – Moskva: Drofa, 2008. – 640 s.
2. Dieudonne J. Foundations of modern analysis / J. Dieudonne. – Academic press New York and London, 1960. – 407 p.
3. Zorich V. A. Matematicheskij analiz. Chast' 1 / V. A. Zorich. – Moskva: FAZIS, 1997. – 554 s.
4. Dorohovtsev A. Ya. Matematychnyy analiz: Pidruchnyk. Ch. 1. / A. Ya. Dorohovtsev. – K.: Lybid, 1993. – 320 s.
5. Lvovskiy S. M. Lekcii po matematicheskomu analizu / S. M. Lvovskiy. – M.: MCNMO. 2008. – 296 s.
6. Lyashko I. I. Matematicheskij analiz. Chast' 1 / I. I. Lyashko, A. K. Boyarchuk, Ya. G. Gay, A. F. Kalajda. – Kiev: Vischa shkola. – 1983. – 495 s.
7. Natanzon S. M. Kratkij kurs matematicheskogo analiza / S. M. Natanzon. – M.: MCNMO. 2008. – 96 s.
8. Kantorovitz S. Introduction to modern analysis. / S. Kantorovitz. – Oxford University Press, New York, 2003; xii+434 p.
9. Bosovskyy M. V. To the issue of study of limit of numerical sequence / M. V. Bosovskyy, M. V. Tretyak. – International Scientific and Practical Conference "Problems and Prospects in Professional Education of the Math Teacher", November 26-27, 2015, Vinnytsia, Ukraine :conference materials. P. 145-148.

Some thoughts concerning the learning of the limit of number sequence

M. V. Bosovsky, M. V. Tretyak

Summary. The article presents the authors' opinion concerning the content and learning techniques of the theme "Limit of number sequence" in course of mathematical analysis for the mathematics students. The material is presented in the form of reasoned answers to the questions, which are traditional for this theme. The example of the answer is following. It is desirable: to consider the notion of limit at first, than notion of continuity; the study of limit has to begin from the notion of the limit of number sequence; among the multitude of definitions of limit, it is advisable to use the definition "in terms of neighbourhoods". It is obligatory to study the following notions: partial limits, subsequences, "0"-symbolic of Landau. It is desirable to study: Stolz theorem, simplest methods of averaging of sequences; recurrence sequences.

Keywords: *sequence, limit, teaching of students.*

Некоторые размышления об изучении предела числовой последовательности

Н. В. Босовский, Н. В. Третяк

Аннотация. В статье представлено авторское видение содержательного наполнения и методики изучения темы «Предел числовой последовательности» в курсе математического анализа для студентов математических специальностей. Изложение ведется в виде аргументированных ответов на ряд традиционных для данной темы вопросов. Ответы на некоторые из них. Предпочтительно: сначала рассмотреть предел, потом непрерывность; изучение предела начинать с предела числовой последовательности; среди нескольких определений предела, в качестве основного, – определение « в терминах окрестностей». Обязательное изучение: частичные пределы, подпоследовательности, «о»-символика Ландау. Весьма желательное рассмотрение: теорема Штольца, простейшие методы усреднения последовательностей, рекуррентные последовательности.

Ключевые слова: *последовательность, предел, обучение студентов.*